Diskrétní Fourierova transformace

Na cvičení se pokusíme naprogramovat diskrétní Fourierovu transformaci (DFT). V dalším cvičení se pak pokusíme o zpětnou transformaci.
Fourierova transformace spočívá ve výpočtu frekvenčního spektra zadaného vstupního obrazu f, které označujeme F (jedná se o komplexní matici s rozměry vstupního obrazu).

$$F(k,l) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\varphi_{k,l}(m,n)\,. \tag{1}$$

Báze $\varphi_{k,l}$ je definována následovně

$$\varphi_{k,l}(m,n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} e^{-i2\pi\left(\frac{mk}{M}+\frac{nl}{N}\right)}, k = 0,1,\ldots,M-1 \text{ a } l = 0,1,\ldots,N-1\,. \tag{2}$$

Abychom při výpočtu báze nemuseli stále počítat odmocninu, hodnoty vstupního obrazu normalizujeme touto odmocninou. Bázi pak počítáme bez této normalizace. Pro výpočet báze je vhodné využít Eulerova vzorce $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Díky tomuto vzorci se nám řešení již v této fázi dělí na reálnou a imaginární část. Přesněji tedy:

$$F(k,l) = R(k,l) + I(k,l)\,. \tag{3}$$

Amplituda spektra $|F(k,l)|$ je

$$|F(k,l)| = \sqrt{R^2(k,l) + I^2(k,l)}\,. \tag{4}$$

Fázový posuv spektra $\Phi(k,l)$ je

$$\Phi(k,l) = \operatorname{arctg}\left(\frac{I(k,l)}{R(k,l)}\right)\,. \tag{5}$$

Energetické spektrum signálu $P(k,l)$ (power spectrum) je možno vypočítat jednoduše jako $|F(k,l)|^2$.

$$P(k,l) = |F(k,l)|^2\,. \tag{6}$$

Energetické spektrum signálu je možno zobrazit tak, že jej logaritmujeme a výsledné hodnoty normalizujeme do rozsahu $\langle 0,1\rangle$. Abychom dobře viděli energetické spektrum, je dobré prohodit 1. s 3. kvadrantem a 2. s 4. kvadrantem. Toto se nám také bude hodit pro aplikaci filtrů ve frekvenční doméně.

Hint: Pracujete s datovým typem `double` pro reprezentaci vstupního obrazu, prvků frekvenčního spektra i fázového posuvu.

Očekávaný výstup